學年(一百)學期(上)「測量平差」期中考參考答案

<2011.11.14.一>

一、期望值，$E(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$E(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

方差的定義，

$$E((x_1-E(x_1))^2)=\sigma_1^2$$

$E((x_2-E(x_2))^2)=\sigma_2^2$；和 協方差者，

$$\sigma_{12}=E((x_1-E(x_1))(x_2-E(x_2)))$$

協方差矩陣為 $E((\boldsymbol{x}-E(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x}-E(\boldsymbol{x}))^T)$

$$=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{symm.} & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

二、首先，線性化換算式子，

$$dN = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$

$$dE = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

藉誤差傳播(Error propagation)，

$$\begin{pmatrix} \sigma_N^2 & \sigma_{NE} \\ \sigma_{EN} & \sigma_E^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_r^2\cos\theta & -r\sigma_\theta^2\sin\theta \\ \sigma_r^2\sin\theta & r\sigma_\theta^2\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_r^2\cos^2\theta + r^2\sigma_\theta^2\sin^2\theta & (\sigma_r^2 - r^2\sigma_\theta^2)\sin\theta\cos\theta \\ \text{symm.} & \sigma_r^2\sin^2\theta + r^2\sigma_\theta^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

尤其，$\sigma_{NE} = \sigma_{EN} = 0$，於 $\sigma_r = r\sigma_\theta$ 條件下。

三、(一)

$$\mathbf{y}\mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} y_1y_1 & y_1y_2 & \cdots & y_1y_m \\ y_2y_1 & y_2y_2 & \cdots & y_2y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_my_1 & y_my_2 & \cdots & y_my_m \end{pmatrix}$$

基於 $y_1y_2=y_2y_1$，$y_1y_m=y_my_1$，$y_2y_m=y_my_2$，. . . ，

故外積成為一對稱方陣。

(二)

$$tr(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)=\sum_{i=1}^{m}y_iy_i$$

$$\mathbf{y}^T\mathbf{y}=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_m^2=\sum_{i=1}^{m}y_iy_i$$

故 $tr(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)=tr(\mathbf{y}^T\mathbf{y})=\mathbf{y}^T\mathbf{y}$。

四、簡記 ϵ_i，$i=1,2,\ldots,12$ 為獨立的測角誤差，

$$(1+\epsilon_1)+(8+\epsilon_8)+(9+\epsilon_9)=\pi$$

$$(2+\epsilon_2)+(3+\epsilon_3)+(10+\epsilon_{10})=\pi$$

$$(4+\epsilon_4)+(5+\epsilon_5)+(11+\epsilon_{11})=\pi$$

$$(6+\epsilon_6)+(7+\epsilon_7)+(12+\epsilon_{12})=\pi$$

$$(9+\epsilon_9)+(10+\epsilon_{10})+(11+\epsilon_{11})+(12+\epsilon_{12})=2\pi$$

組合 **B** 矩陣元素對應於殘差向量者，

$$\mathbf{v}=(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4,\epsilon_5,\epsilon_6,\epsilon_7,\epsilon_8,\epsilon_9,\epsilon_{10},\epsilon_{11},\epsilon_{12})^T$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

閉合差向量，$\mathbf{l}=(\pi-\angle 1-\angle 8-\angle 9,\ \pi-\angle 2-\angle 3-\angle 10,$
$\pi-\angle 4-\angle 5-\angle 11,\ \pi-\angle 6-\angle 7-\angle 12,$
$2\pi-\angle 9-\angle 10-\angle 11-\angle 12)^T$。

五、按題旨，$y_i+v_i=a_0+a_1x_i$，$i\in\{1,2,\ldots,n\}$。

令 $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)^T$ 和 $\boldsymbol{x}=(a_0,a_1)^T$，

設計矩陣為

$$\underset{n\times 2}{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}-1 & -x_1\\ -1 & -x_2\\ \vdots & \vdots\\ -1 & -x_n\end{pmatrix};\quad \underset{n\times 1}{\mathbf{l}}=\begin{pmatrix}-y_1\\ -y_2\\ \vdots\\ -y_n\end{pmatrix}.$$

當目標 $\mathbf{v}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v}$ 函數極小時，$\dfrac{\partial(\mathbf{v}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v})}{\partial\boldsymbol{x}}=0$；

換言之，$\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{l}-\mathbf{A}\boldsymbol{x})=0$，而得 $\boldsymbol{x}=(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l}$。經誤差傳播，$\mathbf{Q}_x=(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1}$，故 $\boldsymbol{x}=\mathbf{Q}_x\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l}$。再者，

$$\mathbf{v}=\mathbf{l}-\mathbf{A}\boldsymbol{x}=(\mathbf{Q}-\mathbf{A}\mathbf{Q}_x\mathbf{A}^T)\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l}=\mathbf{Q}_v\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l},$$

於此 $\mathbf{Q}_v$ 為 $\mathbf{v}$ 後驗的協方差矩陣。