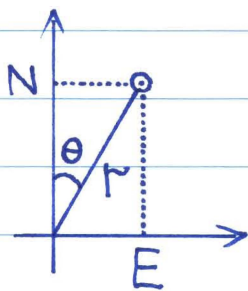


學年(一百)學期(上)土木系「測量平差」期中筆試題

< 2011.11.14.- >

- 一、已知隨機變量 x_1 與 x_2 以及二維機率密度函數 $f(x_1, x_2)$ ，試定義 x_1 的方差、 x_2 的方差 (Variance, 亦稱變異數)，和 (x_1, x_2) 之協方差 (Covariance, 共變異數)。此外用上標 T 表示轉置 (Transpose)，設已知隨機向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 以及該向量所屬的密度函數，試定義 \mathbf{x} 之協方差矩陣。 20%

二、



已知坐標原點到圖示點位之徑向距離 r (m) 與標準差 σ_r ，以及方位角 θ (deg) 與標準差 σ_θ ；且協方差 $\sigma_{r\theta}$ 可略而不計。於換算成直角坐標 $N = r \cos\theta$ 和

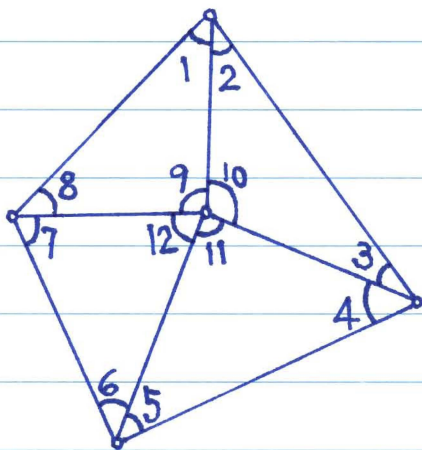
$E = r \sin\theta$ 時，問該直角坐標標準差 (一) $\sigma_N = ?$

(二) $\sigma_E = ?$ 和 (三) 協方差 $\sigma_{NE} = ?$ (四) 另闡述

$\sigma_r = r \sigma_\theta$ 之際， $\sigma_{NE} = ?$ 20% (每子題 5%)

三、定義有 m 個元素的向量， $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ 。(一) 試列式表達外積結果，即 $\mathbf{y}\mathbf{y}^T$ ，為正方的對稱矩陣。跡算子，記成 $\text{tr}(\cdot)$ ，代表加總方陣的對角元素。(二) 試配合 (一) 的說明，續推論恆等式 $\text{tr}(\mathbf{y}\mathbf{y}^T) = \text{tr}(\mathbf{y}^T\mathbf{y})$ 。 20%

四、



如圖示，平面四邊形頂點與圖內共有五個測站。以全測儀施測了十二個等權（方差一致）的水平角。試以四個平面三角形閉合條件（必須等於 180° 或 π 弧度）和一個站條件（繞一

圈等於 360° 或 2π 弧度），共同參與條件觀測平差；並明列出線性組合後係數矩陣的元素（提示：掌握矩陣維度）。 20%

五、二維函數線性迴歸任務中，吾人需用 $n (> 2)$ 個已知 x_i 點的量測 y_i 值、隨機量測誤差 v_i 與所屬的協方差 $\sigma_0^2 Q$ 矩陣 (可設 $\sigma_0^2 = 1$)，平差出 $y_i = a_0 + a_1 x_i$ 直線。今以 $v + Ax = l$ 表達誤差方程組，試完整地定義各向量 (小寫、粗體字型) 與矩陣 (大寫、粗體) 之內容。此外，已知最小二乘平差原理為： $v^T Q^{-1} v$ 趨於極小，試明列 x 和 v 的解答。 20%

一百學年(上)土木系「測量平差」期末開書筆試題

(2012.1.9)

一、假設兩個矩陣互換之前之後，均是乘法相容的。一般，矩陣相乘順序是不許對易的。試論何等情況下(不止一種)，該相乘的矩陣可左右互換。(20%)

二、單一變量隨機量測數據組之加權平均值 (Weighted mean)，試列式說明此值為最小二乘平差解。(20%)

三、何謂 Lagrange 乘子向量，其功用為何？(15%)

四、兩套平面直角坐標系統間計有橫縱平移參數、尺度參數及旋轉參數。非直線上的點數 $n=5$ ，試列出參數估計時所需的設計 (Design) 矩陣。(25%)

五、間接觀測最小二乘 (Least-squares) 平差法中，後驗 (posterior) 觀測殘差所屬的協方差矩陣式子，如何導來？(10%)
該矩陣的秩等於多少？(10%)