九十九(上)土木三「測量平差」參考解答

<2010.11.12>

一、 $E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

$$V(x)=\sigma_x^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^2 f(x)\,dx$$

此外，

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\,dx\,dy, \quad \text{etc.}$$

$$V(x)=\sigma_x^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^2 f(x,y)\,dx\,dy$$

$$V(y)=\sigma_y^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-E(y))^2 f(x,y)\,dx\,dy$$

$$C(x,y)=\sigma_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))(y-E(y)) f(x,y)\,dx\,dy$$

$$r=\frac{C(x,y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

二、經寫成向量及矩陣， $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

應用誤差傳播定律，

$$\begin{pmatrix}\sigma_u^2 & \sigma_{uv}\\ \sigma_{vu} & \sigma_v^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_x^2 & 0\\ 0 & \sigma_y^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_x^2\cos\alpha & -\sigma_x^2\sin\alpha\\ \sigma_y^2\sin\alpha & \sigma_y^2\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sigma_x^2\cos^2\alpha+\sigma_y^2\sin^2\alpha & (-\sigma_x^2+\sigma_y^2)\sin\alpha\cos\alpha\\ (-\sigma_x^2+\sigma_y^2)\sin\alpha\cos\alpha & \sigma_x^2\sin^2\alpha+\sigma_y^2\cos^2\alpha\end{pmatrix}$$

$$\sigma_u^2+\sigma_v^2=\sigma_x^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\sigma_y^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

$$=\sigma_x^2+\sigma_y^2$$

三、(一) σ_0^2 ：尺度變量；首趟演算時，令 $\sigma_0^2=1$

$\mathbf{v}$ ：觀測殘差 $n\times1$ 向量

$\mathbf{x}$ ：參數(改正量) $u\times1$ 向量

$\mathbf{A}$ ：$n\times u$ 設計矩陣，$\operatorname{rank}\mathbf{A}=u$

$\mathbf{l}$ ：約化觀測 $n\times1$ 向量

$\mathbf{Q}$ ： $n \times n$ 先驗量測誤差協方差矩陣

(二) $\dfrac{\partial \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \mathbf{0}^T = 2\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1}(-\mathbf{A})$

取上式的轉置， $\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{l}$$

經誤差傳播

$$\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1}$$

$$= (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1}$$

故得估計式 $\boldsymbol{x} = \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{l}$

四、共兩個水準閉合圈條件，

$$(h_1+v_1)+(h_2+v_2)+(h_3+v_3)+(h_4+v_4)+(h_5+v_5)$$
$$+(h_6+v_6)+(h_7+v_7) = 0$$

$$(h_5+v_5)+(h_6+v_6)+(h_7+v_7)+(h_8+v_8)+(h_9+v_9)$$
$$+(h_{10}+v_{10})+(h_{11}+v_{11}) = 0$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_{11})^T$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} -h_1-h_2-h_3-h_4-h_5-h_6-h_7 \\ -h_5-h_6-h_7-h_8-h_9-h_{10}-h_{11} \end{pmatrix}$$

誤差方程組為 $\mathbf{Bv} = \mathbf{l}$。經引入關聯向量(含 Lagrange 乘子) $\mathbf{k}$ 後，極小化 $\mathbf{v}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v} - 2\mathbf{k}^T(\mathbf{Bv}-\mathbf{l})$。依序地，

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{B}^T\mathbf{k}$$

$\mathbf{v} = \mathbf{QB}^T\mathbf{k}$；按誤差傳播，$\mathbf{Q}_v = \mathbf{QB}^T\mathbf{Q}_k\mathbf{BQ}$

$$\mathbf{BQB}^T\mathbf{k} = \mathbf{l}$$

$$\mathbf{k} = (\mathbf{BQB}^T)^{-1}\mathbf{l} = \mathbf{Q}_l^{-1}\mathbf{l}$$

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_l^{-1}\mathbf{Q}_l\mathbf{Q}_l^{-1} = \mathbf{Q}_l^{-1}$$

變通地，$\mathbf{k} = \mathbf{Q}_k\mathbf{l}$